

## Contrôle Intermédiaire

---

*L'épreuve dure 1h30. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de **justifier** les réponses.*

**Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. A l'intérieur de chaque partie, rédigez dans l'ordre SVP quitte à laisser des blancs et revenir sur un exercice plus tard, cela facilite grandement le travail des correcteurs.**

---

### Partie I (à rédiger sur une première copie)

#### Exercice 1 [4 points]

- Définissez la convergence normale d'une **série** de fonctions  $f_n$  définie sur un domaine  $D$ .
- Est-ce que la **série** donnée par le terme général :

$$f_n(x) = \cos(nx)/nx^2, \quad n \geq 1, \quad x \in ]0, +\infty[,$$

converge simplement ?

- Cette même série converge-t-elle normalement ?

**Exercice 2** [5 points] Pour les **suites** de fonctions données par le terme général suivant pour  $n \geq 1$ , dites si elles convergent simplement ? uniformément ?

- $a_n(x) = x^{2n}, \quad x \in ]0, 1[.$
- $b_n(x) = \sin(nx^2), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $c_n(x) = \frac{\ln(nx)}{1+\ln(nx)}, \quad x \in [1, 2].$

### Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

**Exercice 3** [3 points] Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + 1/x).$

**Exercice 4** [4 points] Dire si les **séries numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 0$ ) convergent :

- $u_n = \frac{\sin(n)}{(n+1)^2}.$
- $v_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}.$
- $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$

**Exercice 5** [4 points] Dire si les **suites numériques** données par le terme général suivant ( $n \geq 1$ ) convergent. Si oui, donner la limite.

- $a_n = \frac{\ln(e^n+1)}{n}.$
- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n \ln(n)}.$